線分ABの長さが知りたい

① ABを含む直角三角形を探して，三平方の定理を使う。

(AB以外の二辺の長さがわかっている必要がある)

② ABを含む三角形で余弦定理を使う。

(AB以外の二辺の長さと，ABの向いの角のcosの値がわかっている必要がある)

③ ABを含む三角形と合同または相似な三角形を探す。

$$a^m = M \iff m = \log_a M$$

$\log_a M$ について，

a を底といい，$a>0$ かつ $a \neq 0$（底の条件）
M を真数といい，$M>0$（真数条件）

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

$$\log_a x^n = n \log_a |x|$$ （$x>0$ なら $n\log_a x$ としてよい）

底の条件と真数条件を満たすかぎり，

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$ （とくに $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$）

※ $\log_a x = y$ とすると
$a^y = x$ なので，
$\log_b a^y = \log_b x$

$y \log_b a = \log_b x$

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Pが真であるとき、qも必ず真

対偶法（「$P \Rightarrow q$」が真であることを証明する）

- $\overline{q} \Rightarrow \overline{P}$ が真であることを証明
- よって $P \Rightarrow q$ も真

背理法（「P」が真であることを証明する）

- $\overline{P} \Rightarrow q$ より $\overline{q} \Rightarrow P$
- $\overline{q}$ が真であることを証明
- ゆえにPも真

やっていることは似ているが、証明する「対象」が違うので注意が必要。

対偶法のオマケ（ルールを無視すると何でもアリになるという話）

命題P：$1+1=1$

命題Q：$1+1=3$

について，$P \Rightarrow Q$が成り立つかどうか考える.

$P \Rightarrow Q$の対偶 $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ について，
命題 $\overline{P}$ は常に真なので，これは成り立つ。
ゆえに，$1+1=1$ ならば $1+1=3$ であるといえる。

$\overline{P}$が常に真になるような命題Pを用意できれば，
命題Qは何でもよいため，
$1+1=1$ ならば，カエサルは日本人である，
など，何でも言える。

また，$1+1=1$ ならば $1+1=2$ というのも，
対偶である $1+1 \neq 2$ ならば $1+1 \neq 1$ が
成り立つため，成り立つといえる。

背理法の手順とポイント

①,「Pならばqである」という命題を用意（定理を使う）

②, ①より、$\overline{q}$ならば$\overline{P}$である（対偶）

③, qが偽であることを証明する（証明の本体）

④, ②と③より、Pは真である

※ 普通、②は書かずに省略する。

例）　$\sqrt{2}$は無理数であることを証明せよ

$\sqrt{2}$が無理数でない、すなわち$\sqrt{2}$が有理数であるならば、
$\sqrt{2}=\frac{b}{a}$となる互いに素な整数a, bが存在する。…①

※「$\sqrt{2}=\frac{b}{a}$となる既約分数が存在する」と書いても同じ

[①の命題の対偶より、$\sqrt{2}=\frac{b}{a}$となる互いに素な整数が存在しなければ、
$\sqrt{2}$は無理数である。…②]

$\sqrt{2}=\frac{b}{a}$について、両辺を平方（2乗）すると
$2=\frac{b^2}{a^2}$　となり、さらに両辺にa^2をかけると
$2a^2=b^2$　となる。
ここで、条件（a, bが整数）より、$2a^2$は2の倍数で、b^2も2の倍数となる。
b^2が2の倍数であるためには、bが2の倍数でなくてはならず、
このためb^2は4の倍数になる。
ところで、$2a^2=b^2$であるため、b^2が4の倍数であるためには
aが2の倍数でなくてはならず、bと同様aも2の倍数となる。
ここで、ともに2の倍数であり、かつ互いに素である整数a, bは、
明らかに存在しない…③

②, ③より、$\sqrt{2}$は無理数である。

※　[から]までの間は書かなくてもよい。
（①と③だけでも証明になる）