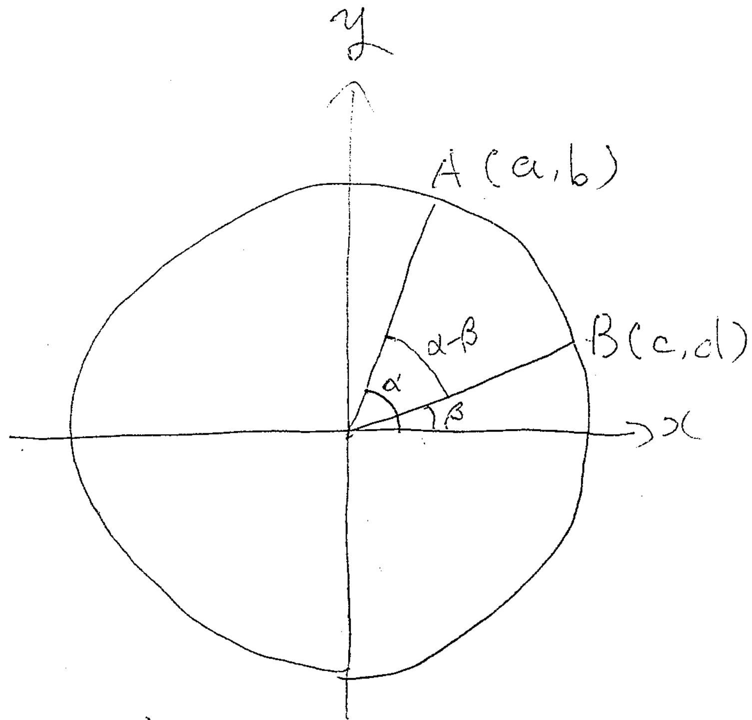
$$AB^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2$$
$$= (a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bd+d^2)$$
ここで $OA^2 = OB^2 = a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1$ なので
$$AB^2 = a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd$$
$$= 2-2(ac+bd) \cdots ①$$



一方，余弦定理より，△OABにおいて
$$AB^2 = OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot \cos(\alpha-\beta)$$
$$= 2-2\cdot\cos(\alpha-\beta) \cdots ②$$

①，②より，$AB^2 = 2-2(ac+bd) = 2-2\cdot\cos(\alpha-\beta)$
ゆえに $\cos(\alpha-\beta) = ac+bd$ となるが
ここで $a=\cos\alpha$，$b=\sin\alpha$，$c=\cos\beta$，$d=\sin\beta$ なので
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$ となる

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

をもとに，$\cos(\alpha-\beta)$以外の加法定理を考える。

前提として

$$\begin{cases}\sin(-\theta)=-\sin\theta,\ \cos(-\theta)=\cos\theta\ \cdots ①\\ \sin(90-\theta)=\cos\theta,\ \cos(90-\theta)=\sin\theta\ \cdots ②\end{cases}$$

を定理として扱う。

∘ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\{\alpha-(-\beta)\}$

$=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)$

①より，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta\ \cdots$Ⓐ

∘ $\sin(\alpha+\beta)=\cos\{90-(\alpha+\beta)\}$ ∵②

$=\cos\{(90-\alpha)-\beta\}$

$=\cos(90-\alpha)\cdot\cos\beta+\sin(90-\alpha)\cdot\sin\beta$

②より，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdots$Ⓑ

∘ $\sin(\alpha-\beta)=\cos\{90-(\alpha-\beta)\}$ ∵②

$=\cos\{(90-\alpha)+\beta\}$

Ⓐより，$\cos\{(90-\alpha)+\beta\}=\cos(90-\alpha)\cdot\cos\beta-\sin(90-\alpha)\cdot\sin\beta$

$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$ ∵②

又は

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\{\alpha+(-\beta)\}$

Ⓑより $\sin\{\alpha+(-\beta)\}=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)$

$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$ ∵①

さらに，いろいろな定理を考えてみる

○ $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

$$= \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

ここで $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ という公式を利用するために，分母と分子をそれぞれ $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ で割ると，

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$