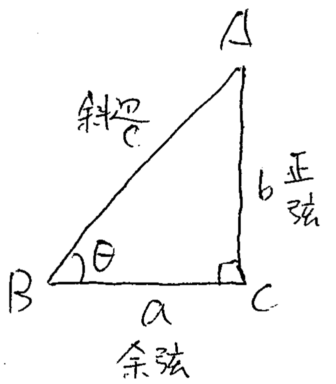
三角比

定義、

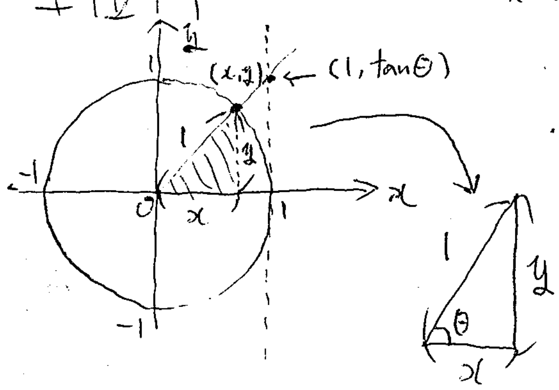


・直角三角形の一つの鋭角をθとすると、一番長い辺が斜辺で、θの正面の辺（弦）が「正弦」。斜辺 × $\sin\theta$ = 正弦

斜辺と正弦の他に、もう一つ余った辺が「余弦」で、斜辺 × $\cos\theta$ = 余弦

（オマケ）θと直角の他に、もう一つ余った角があるが、これを「余角」といい、余角 = $90-\theta$ となる

単位円



※原点を中心とする半径1の円で、この円上の点 (x, y) は、常に原点から1の距離にあるので、$\sqrt{x^2+y^2}=1$、すなわち $x^2+y^2=1$ で表される。

定義から、斜辺 × $\sin\theta$ = 正弦なので、$\sin\theta = y$

同様に、$\cos\theta = x$ となる

また、$\tan\theta = \frac{\text{正弦}}{\text{余弦}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$ となる

ここで、$\tan\theta$ が原点と (x, y) を通る直線の傾きを表し、正弦と平行な接線との交点が $(1, \tan\theta)$ であることに注意。

公式その1

$$\begin{cases} \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ \tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \end{cases}$$ （相互関係）

$$\begin{cases} \sin(180-\theta) = \sin\theta \\ \cos(180-\theta) = -\cos\theta \\ \tan(180-\theta) = -\tan\theta \end{cases}$$ （補角）

$$\begin{cases} \sin(90-\theta) = \cos\theta \\ \cos(90-\theta) = \sin\theta \\ \tan(90-\theta) = \frac{1}{\tan\theta} \end{cases}$$ （余角）

公式その2（正弦定理）

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$\Rightarrow a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

また、$\dfrac{a}{\sin A}=2R$ より、$a=2R\cdot\sin A$, $\sin A=\dfrac{a}{2R}$

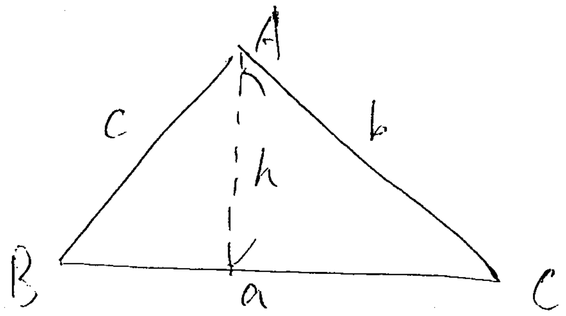
〔注意〕
$$\begin{cases} a:b=c:d \\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \\ ad=bc \end{cases}$$

この3つが同じ意味であることに注意
特に2番目の形（比の値）は高校以後の数学でよく使う

公式その3（余弦定理）

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$$
$$\cos C=\frac{-c^2+a^2+b^2}{2ab}$$

公式その4（面積）

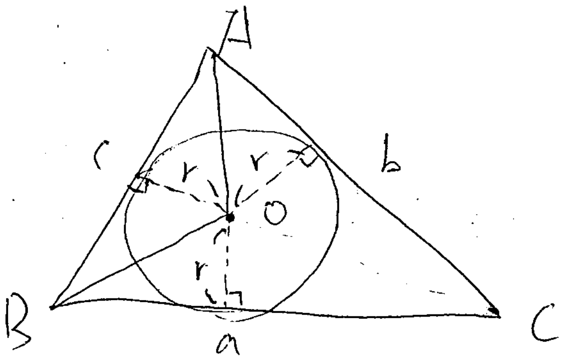


aを底辺と見ると、
$h=b\sin C$ なので、

$$\text{面積}=\frac{a\cdot b\cdot\sin C}{2}$$

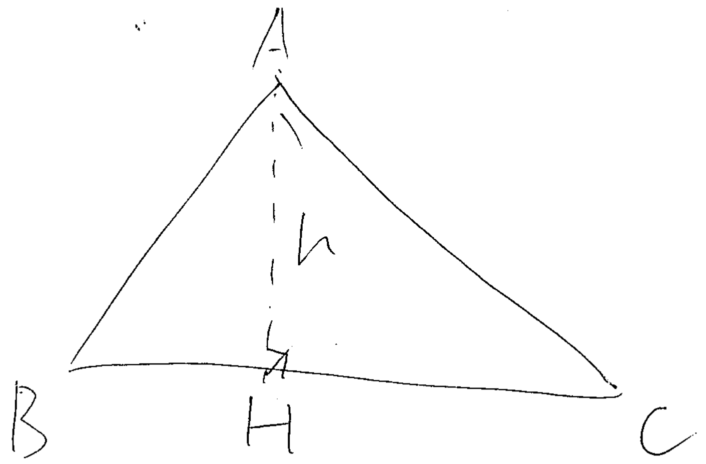
↑ 2辺とその間の角がわかれば
面積がわかる

（オマケ）内接円の中心をO、半径をrとすると



$$\triangle ABC=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA$$
$$=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}$$
$$=\frac{(a+b+c)r}{2}$$

三角形の面積

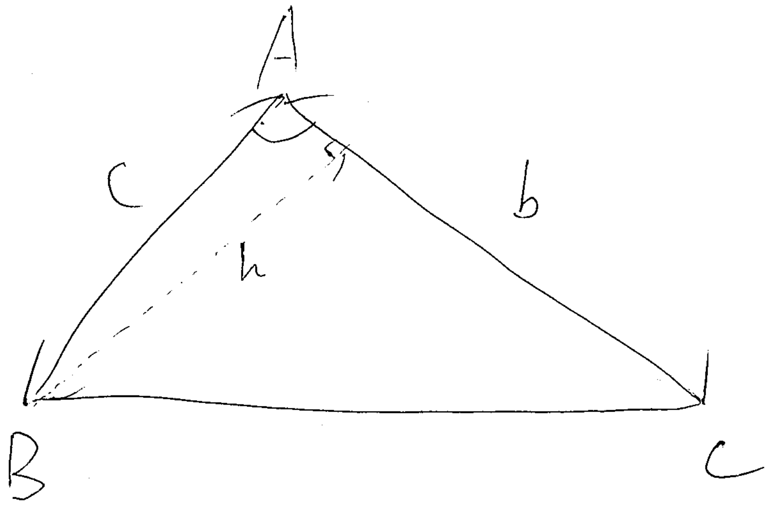


底辺×高さ÷2

⇓

$$\frac{ah}{2}$$

(BCの式とAの座標がわかれば「点と直線の距離の公式」でhを求められる)

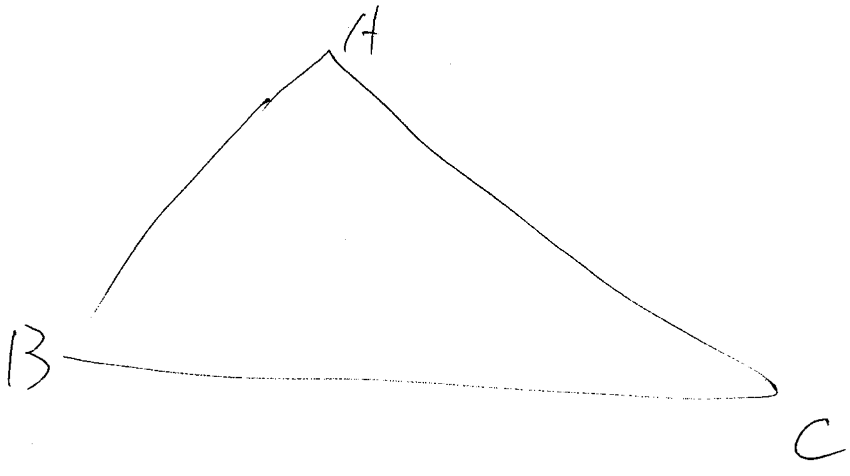


2辺×挟角のsin÷2

⇓

$\frac{bc\sin A}{2}$ (ベクトルで表すと $\frac{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A}{2}$)

∵ $h = c\sin A$ より、$\frac{bh}{2} = \frac{b\cdot c\cdot \sin A}{2}$

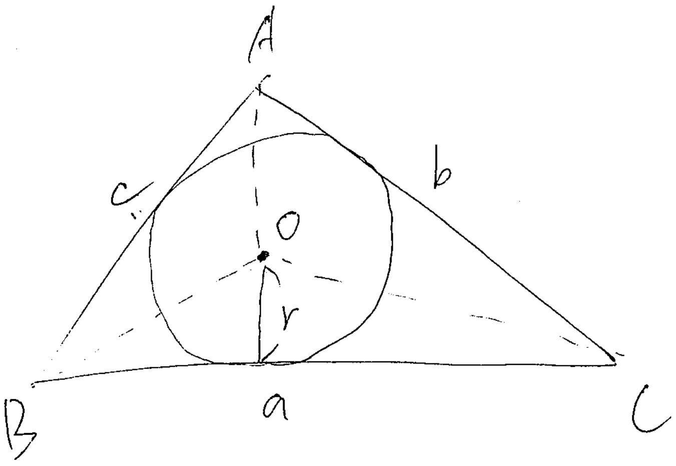


ベクトルの外積の大きさの半分…

⇓

$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (p, q) \\ \overrightarrow{AC} = (r, s) \end{cases}$ ならば

$$S = \left| \frac{ps - qr}{2} \right|$$



$$\triangle ABC = \triangle OBC + \triangle OCA + \triangle OAB$$
$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$$
$$= \frac{(a+b+c)r}{2}$$

ヘロンの公式

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

（ただし $s = \frac{a+b+c}{2}$ ）
↑スモールs（Sではない）

※公式自体は覚えなくてよいが

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A \\ \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = (1+\cos A)(1-\cos A) \end{cases}$$

を連立させて導くということは知っておく

その他

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A \\ \sin A = \frac{a}{2R} \text{（正弦定理）} \end{cases} \Longrightarrow S = \frac{abc}{4R}$$ （ただしRは外接円の半径）

↳ $S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ （ただしRは外接円の半径）

※上の式も覚える必要はない。
面積を求めるときに正弦定理を使うことが多い
ということを確認しておけば十分。