高校数学を独習するための資料

令和 2 年現在の教育課程で範囲外になってしまっている部分を補うために、行列と線型変換について大雑把な紹介をします。なお、他と紛らわしいので中括弧は{ }でなく[ ]を使います。

行列をごく乱暴に説明すると「値をタテヨコに並べたもの」のことで、古くは連立一次方程式を素早く解くための計算方法として用いられていました。現代数学にも「掃き出し法」として引き継がれています[*1]。

中学校で習う解き方

$$\begin{cases} 3a+2b=1 \\ -a+b=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a+2b=1 \\ -2a+2b=6 \end{cases} \rightarrow 5a=-5 \rightarrow 1+b=3 \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$$

拡大係数行列を使った掃き出し法

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

高校 2 年生で習う「組み立て除法」のようなもので、どうせ変わらないものは最初から書かずに、計算に必要な数字だけ書いて手間を省く「書き方」だといえます。この程度の計算ならどちらでやっても大差ありませんが、5 本も 10 本も連立になった式だと、文字の部分を書かないだけでも時間短縮になります。またコンピュータに計算させる場合にも、数字だけ取り出しておくと効率よく処理できます。

同じ考え方が複素数の計算に使えます。たとえばこんな風に「書き換えて計算する」ことができるでしょう。

普通に計算

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

数字だけ取り出して計算

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

連立方程式のときは数字が「タテとヨコ」に並んでいましたが、複素数の足し算であれば「タテかヨコ」に並べておけば十分なので、結局ベクトルの足し算になります。この場合「左の数字が実部で右の数字が虚部」または「上が実部で下が虚部」という解釈になります。

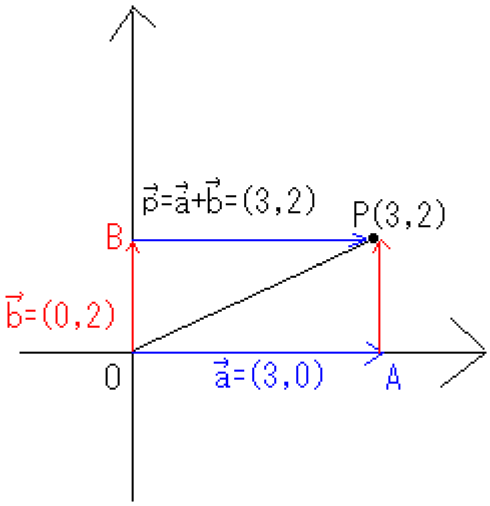
もうひとつの線型変換をごく乱暴に説明すると「足し算や掛け算を、先にやっても後からやっても結果が変わらないような操作」のことです[*2]。数学の記号で書けば

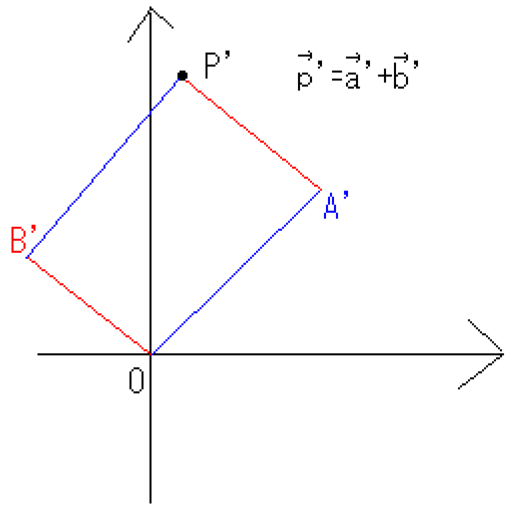
$$\begin{cases} f(s+t)=f(s)+f(t) \\ f(cu)=cf(u) \end{cases}$$

が成り立つような f のことをいい、ベクトルの知識と組み合わせると威力を発揮します。ベクトルの考え方で一番大切なのは「x と y を別々に考える」ということで、操作が「線型変換」であるということは「別々に考えてあとで足せばいいよ」というのと同じ意味です。

なお、高校数学では「座標の書き方」に似せてヨコに書いた「行ベクトル」（横ベクトル）を先に習いますが、断りがなければベクトルはタテに書いた「列ベクトル」（縦ベクトル）で扱うのが普通なので、以下でもそのように表記します。実は、このことは単に書き方だけの問題ではないのですが、説明は後回しにします。

線型変換で何ができるのかを、実際の問題で試してみましょう。たとえば「点(3、2)を原点中心に(左回りで)60度回転移動した座標を求めよ」という問題があったとします。高校2年生までの知識で解くには、下のように考えるのが手っ取り早いでしょう。





座標Pにはx軸方向とy軸方向で2種類の成分(要素)があるため、一気に動かそうとしても大変です。そこでいったん $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ と分解して、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を回転させて $\vec{a}'$ と $\vec{b}'$ を作り、改めて $\vec{a}'+\vec{b}'=\vec{p}'$ として $\vec{p}'$ を求めればよいということです。右の図で $\vec{A'P'}=\vec{OB'}=\vec{b}'$ であることに注意してください。平行四辺形を回転移動させても平行四辺形のままである、つまり回転移動が線型変換であるために、このような計算が可能になっています。

ここで基本ベクトル $\vec{e}_x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ と $\vec{e}_y=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を使うと、もっと便利に計算できます。結論を先に書いてしまうと、 $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}=3\vec{e}_x+2\vec{e}_y$ より $\vec{p}'=\vec{a}'+\vec{b}'=3\vec{e}_x'+2\vec{e}_y'$ なので、結局のところ $\vec{e}_x'$ と $\vec{e}_y'$ 、つまり点(1,0)と点(0,1)が回転移動でどの座標に移るかさえわかれば、点P'の座標(つまり位置ベクトル $\vec{p}'$)がわかるということです。三角関数を単位円で理解していれば

$\vec{e}_x'=\begin{pmatrix}cos60°\\sin60°\end{pmatrix}$ と $\vec{e}_y'=\begin{pmatrix}-sin60°\\cos60°\end{pmatrix}$ はすぐにわかります。

全部まとめると、計算式は以下のようになるでしょう。

$$\vec{p}'=3\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2\\1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(1/2)+2\cdot(-\sqrt{3}/2)\\3\cdot(\sqrt{3}/2)+2\cdot(1/2)\end{pmatrix}$$

複素数の知識を使えばもっとスマートに解けますが、ベクトルのいいところは、何のために何をしているかわかりやすく、見通しよく計算を進められるところでしょう。

なお「線型」という言葉ですが、ここで紹介した線型変換のほか、足し算と掛け算だけで表現できることを示す「線型結合」とか、線型結合であるなしを示す「線型従属」「線型独立」などいろいろな用語に含まれます。またそれぞれ「一次変換」「一次従属」「一次独立」などと言い換えられることがあり「線型」の漢字が「線形」と書かれることもあります。基本的な意味は「足し算掛け算しかしない」で、だからこそ同じ用語が含まれているということを、すぐには納得できないと思いますが、ひとまず意識はしておきましょう。

さらにこの計算の一般化、つまり「位置ベクトル $\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ で表される点Pを、原点中心に60度」ではなく「位置ベクトル $\vec{q}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ で表される点Qを、原点中心にθ」回転させたときの式を考えます。さきほど数字を使って計算したところを文字に置き換えるだけなので途中は省きますが、

$$\vec{q}\,'=x\begin{pmatrix}cos\theta\\sin\theta\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-sin\theta\\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cdot cos\theta-y\cdot sin\theta\\x\cdot sin\theta+y\cdot cos\theta\end{pmatrix}$$

となります。

こんなことができて何が嬉しいのかというと、高校数学を勉強している人にとっての目先のご利益としては「（暗記や数学的直感でなく）理屈で対処できる範囲が広がる」ことでしょう。たとえば三角関数の加法定理なども、上の式を使えば任意の点を原点回りに回転移動できるので、点（cosα,sinα）をβ回転させて、点（cos(α+β),sin(α+β)）の座標を求めれば示せます。

ところで、上の式の真ん中部分（中辺）に、縦ベクトルが2つ並んでいるのが見えます。これをもっとスマートに書けないかと考えると、最初に出てきた行列を使うのが便利でしょう。つまり「原点中心にθ回転させる」という操作をfとすると、

$$\vec{q}\,'=f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cos\theta & -sin\theta\\sin\theta & cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cdot cos\theta-y\cdot sin\theta\\x\cdot sin\theta+y\cdot cos\theta\end{pmatrix}$$

ということになります。どういうルールで計算しているのかぱっと見ではわかりにくいかもしれませんが、実は「内積」を繰り返し取っているだけです。

ばらばらにしてみましょう。

$$\begin{pmatrix}cos\theta & -sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cdot cos\theta-y\cdot sin\theta\end{pmatrix}$$

これはベクトル（cosθ,-sinθ）とベクトル（x,y）の内積を求める計算とまったく同じです。

$$\begin{pmatrix}sin\theta & cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cdot sin\theta+y\cdot cos\theta\end{pmatrix}$$

これもベクトル（sinθ,cosθ）とベクトル（x,y）の内積を求める計算とまったく同じです。つまり、ベクトルや行列の積を取るときは「左をヨコに右をタテに」見てバラして、内積の計算を「左の行数=右の列数」回やって並べればいいわけです。なおもし、左の行数と右の列数、左の列数と右の行数が、両方一致していない場合は、上のやり方でいう「積」を定義（あるいは計算）できません。

ちょっと余談になりますが、そもそもの話をすれば、ベクトル $\vec{p}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ と $\vec{q}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ の内積は

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=ac+bd$$

と計算するのが本来で、小さな「T」がタテヨコの入れ替え（より正確には「転置」）を示しています。後回しにした「ベクトルは縦に書くのが基本」である理由のもうひとつがこれです。いっぽう、

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac & ad\\bc & bd\end{pmatrix}$$

を直積といって、右辺の行列からいろいろな「積」を取り出すことができます。左上からナナメに足してac+bdが内積（つまり $|\vec{p}||\vec{q}|cos\theta$ ）になるのはもう紹介しましたが、平面の幾何ベクトルなら右上からナナメに引き算して|ad-bc|が面積（つまり $|\vec{p}||\vec{q}|sin\theta$ ）になるのも覚えておいて損がありません[*3]。ベクトルや行列の積にはいろいろな種類があり、線型変換で便利な内積がとくに重要だから、最初に習っただけなのです。

ここから先は理系の生徒向けの話になります。

複素数の足し算（と引き算）がベクトルの足し算で表現できることはすでに紹介しましたが、では掛け算（と割り算）はどうなっているのでしょうか。こちらはベクトルのスカラー倍を2回やった和（つまり行列とベクトルの積）で表現できます。実際にやってみましょう。

複素数同士の掛け算に分配法則を適用すると、

$$(a+bi)(c+di)=(a+bi)c+(a+bi)di$$

という「線型結合」になります。つまり「a+biをc+diに掛ける」という操作の結果を知りたいなら、1にa+biを掛けた結果をc倍、iにa+biを掛けた結果をd倍して、足し合わせてやればよいということです。

実際にやってみると、 $(a+bi)1=a+bi$ 、 $(a+bi)i=-b+ai$ なので、これまでと同様に「上が実部で下が虚部」のベクトルで表現すると、

$$c\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac-bd\\bc+ad\end{pmatrix}$$

回転移動について考えたときと同様に、「a+biを掛ける」という操作をfとすると

$$f\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac-bd\\bc+ad\end{pmatrix}$$

となります。以前はこれを「複素数の掛け算は行列の左乗（掛け算）を表す」と説明する参考書があったようで、混乱の原因になっていましたが、正しくは「複素数の掛け算は行列の左乗で（数字の部分を）計算できる*4」ということです。このとき「操作」を表現している（fに相当する）行列を「表現行列」といいます。

注目すべきは、a=cosθかつb=sinθつまりa+bi=(cosθ)+i(sinθ)のとき、掛け算の表現行列が2次元の回転行列（回転移動の表現行列）と一致することです。複素平面で「r[(cosθ)+i(sinθ)]の掛け算はr倍にしてθ回転させることを表す」と習うのは、こういう理由からです。もちろん、2ページめで紹介した「点（3、2）を原点中心に（左回りで）60度回転移動した座標を求めよ」なんていう問題も、

$$[\cos(\pi/3)+i\cdot\sin(\pi/3)](3+2\mathrm{i})$$

という計算で解くことができます。回転の中心が原点でない場合に、回転の中心からの位置ベクトルを回すと考えるのと、複素平面上で平行移動を使うのでどちらが楽かは人によるでしょうが、理系の生徒であれば両方できるようになっておくのが得策です。同様に三角関数の加法定理も

$$(cos\beta+i\cdot sin\beta)(cos\alpha+i\cdot sin\alpha)$$

という計算で導けます*5。

複素平面という「何かもの」が先にあるのではなく、複素数とベクトルは関わりが深いから、複素数でベクトルの問題を解決したり、ベクトルで複素数の問題を解決したりするために、便利に使える図を描いておこうという趣旨なのだと理解しておきましょう。

行列や線型変換の他にも、オイラーの公式（ $e^{ix}=(cosx+i\cdot sinx)$ のもの）、ロピタルの定理と安田の定理、マクローリン展開、サラスの方法、cos(π/5)の求め方と値、方向ベクトルと勾配ベクトル∇f、実数方程式で解の共役複素数も解になることの説明、いわゆる「ガウス・グリーンの定理」（ガウスの定理とグリーンの定理から高校数学用の積分公式をでっち上げたもの）、いわゆる「6分の1定理」、いわゆる「バウムクーヘン分割積分」など、高校数学の範囲外の便利なやり方や考え方はたくさんあります。理系の分野に進学すればどのみち習うことになるでしょうし、身に付ければ身に付けただけ楽ができます*6ので、ぜひ勉強してみてください。

*1　ガウス･ジョルダンの消去法とも呼ばれ、確認できる最古の原型は古代中国の「九章算術」という数学書に出てくるそうです。

*2　より正確には「操作」ではなく「変換」とか「写像」と呼ぶべき（だからこそ線型変換という）ですが、平成元年公示の学習指導要領で「写像」が高校数学の範囲から外れてしまいました。

*3　本当は「外積の大きさ」が「張る平行四辺形の面積」を示しますが、平面幾何ベクトルであればこのように計算しても同じ結果になります。また空間幾何ベクトルでは位置ベクトルを 3 つ並べて行列式を計算すると「張る平行六面体の体積」（いわゆるスカラー三重積と同値）に一致します。

*4　もう少し正確には、c+di をベクトルに「戻し」て、ベクトルに「a+di を掛ける操作の表現行列」を掛けて、計算結果を複素数に「直す」と、求めたかった「a+bi 掛ける c+di」の答えと一致します。このような考え方を可換図式といい、最初に示した連立方程式を行列で解くやり方もこの一例です。

*5 このように、計算を楽にするために使える、あるいは実数だけではできない計算を可能にする、というのが複素数を導入する第一目的で、なにも「 $x^2=-5$ 」のような方程式の「存在しない解」を出すために習うわけではありません。掛け算すると-1 になる数を想定しておくと図形やベクトルの計算が楽になるよ、というのがポイントなのです。回転移動や三角関数と相性がよいため、物理分野の計算でとくに活躍します。

*6　数学ができるできないという前に、これがわかって実践できるかどうかが本当の大問題です。

余談
もう少し進んだ数学では*4 の例を、ベクトル「から」複素数「を」作る（生成する）と考え、

$g\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=s+ti$　などと、2 次元実数ベクトル　$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$　から複素数 s+ti への全単射な線型変換（例では仮にgとした）を用意します。線型変換の表現「行列」であるはずの g のところがベクトルになっていますが、ベクトルも行列の仲間ではあるので気にしないでください。このとき線型変換のところは一通りに限定されるわけではなく、たとえば　$h\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=2s-ti$　のようにしても問題ありません。

集合　$\{\, g(\vec{e}_s),\ g(\vec{e}_t)\}=\{1, i\}$　や集合　$\{h(\vec{e}_s), h(\vec{e}_t)\}=\{2, -i\}$　を（生成されるベクトル空間、つまりここでは複素数全体の集合の）「基底」といい、互いに線型独立で全域性を保つ（つまり変換が全単射である）限りにおいて自由に選ぶことができます。

また集合　$\{\vec{e}_s, \vec{e}_t\}=\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$　も（数ベクトル空間、つまりここでは 2 次元実数ベクトル全体の集合の）「基底」のひとつで、ここまで紹介した考え方の中心となるいちばん簡単な形なので、とくに標準基底と呼ばれたり順序基底として扱われたり、ある種の特別扱いを受けます。