

付録 中学生に数学を教えてみよう

この資料は[高校数学独習用の資料](#)の付録です。

学科の勉強に限っていえば、もっとも効率的な復習は他の人に教えることです。ここでは、ベクトルを習った高校生が、中学1年生に「正負の数」を教える想定で、いくつかポイントを紹介します。

ここで習得すべき事柄は、

- 足し算と掛け算では、掛け算を先に処理すること。すでに算数で習ったルールですが、重要事項なので再確認の方がよいでしょう。掛け算を処理してしまえば、あとは足し算だけやればよいことも確認しておきましょう。
- 括弧の使い方。いろいろな考え方があるでしょうが、括弧は「すべての値につけるもの」だと考えるのがおすすめです。たとえば $2+3+4=9$ は本来 $(2)+(3)+(4)=(9)$ であるとみなし、括弧は「掛け算が終わったら外す」ものだと決めてしまった方がルールがすっきりします。もちろんこの通りに書くよう教える必要はなく、数学には「省略した書き方」が頻繁に出てくることも紹介しておきます。
- 掛け算だけまたは足し算だけの「部分」は順番を自由に入れ替えられること。たとえば $2+3+4=4+2+3$ であるし $2\times 3\times 4=4\times 2\times 3$ であること。
- マイナスの数は「 $(-1)\times x$ 」の形に変形できること。たとえば $5\times(-3)=5\times(-1)\times 3$ と計算できること。また引き算の記号「-」を「 $+(-1)\times$ 」に書き換えても意味が同じであること。
- 引き算はマイナスの足し算、割り算は分数の掛け算に直せること、つまり四則演算が入り混じった式でも足し算と掛け算だけの形に直せること。意欲のある生徒であれば「線型結合」という用語を紹介しても構いません。
- 分数の「分子と分母に同じ値を掛け算(または割り算)」しても値が変わらないこと。同じ値で割り算することをとくに「約分」と呼ぶこと。

と、重要なものがそろっています。

とくに習得が難しいのは、分数の扱いでしょう。分数の扱いは3段階で説明するのがおすすめです。まず整数の割り算について、たとえば $2\div 3=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ のように、割り算が分数の掛け算になる

ことだけを紹介します。その後で、たとえば $2\div 0.3=2\times\frac{1}{0.3}=\frac{2}{0.3}=\frac{2\times 10}{0.3\times 10}=\frac{20}{3}$ のように、小

数を使った説明をして、最後に $2\div\frac{3}{10}=2\times\frac{1}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{\frac{3}{10}}=\frac{2\times 10}{\frac{3}{10}\times 10}=\frac{20}{3}$ を小数の計算と並べて書

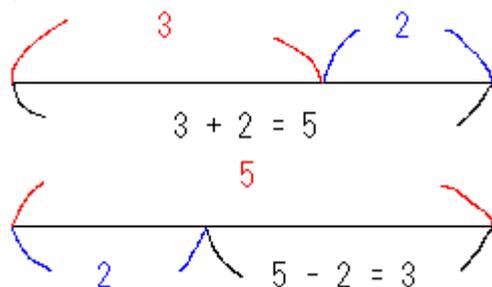
いて、同じことをしているのだと確認します。中学1年の段階ではまだ繁分数は習いませんが、上下の式が同じ内容であることは $0.3=\frac{3}{10}$ さえわかっているならば理解できるはずです。

単元の名前は「正負の数」ですが、まずは「四則演算」がしっかりできることが重要なので、ここまでの説明にややこしい式を使う必要はありません。中学1年生でもぱっと見ただけで「答えはわかる」くらい簡単な値だけを使うようにしてください。算数と違って数学は「答えの数字がいくつなのか」を追いかけるのではなく「どういうルールがあってどうすれば使いこなせるか」を追求するものだという考え方も、紹介しておくべきでしょう。

ここまでの「数字が簡単であれば四則演算が混じった式を足し算の連続に変形できる」というラインを「全員が到達すべき」基準としておきます。

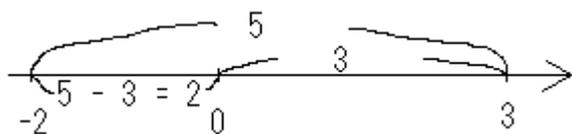
基本の確認が終わったらよいよ本題です。まずは少し面倒な計算を提示して、生徒に「間違えてもらいます。たとえば $-\frac{3}{7}+1.5-3$ くらいで十分でしょう。中学1年生くらいだと自力で間違えられない(黙ってしまう)生徒の方が多いでしょうが、ここは根気よく、自分で「わからない」と言えるのを待った方が後が楽です。

解決できない問題があることを確認できたら、それを乗り越えるための手立てを紹介します。ここでは数直線の考え方を導入するのですが、その前に長さの扱いを再確認しておきます。線型結合を長さで表現したときの関係は、実は2種類しかありません。具体的な数字で示すと以下のようになります。



黒字の部分で計算できるようになることが目標ですが、たいていの生徒は数字だけ「5」とか「3」などと答えるだろうと思います。ここで「何と何を何算してその数字がわかるのか」ということをしっかり確認しておきます。また図を描いて提示するときも、上記のように式がわかる形で描いてください。ルールを身に付けて使いこなすのが数学であることを再度強調しておいてもよいでしょう。

ホワイトボードや黒板を使っている場合、上記の図は消さずに残して進みます。紙だけで進めるときも、専用の紙を1枚使って取っておきます。問題を少し簡単にして、たとえば $3-5$ とか $-2+6$ のような計算を、数直線を利用して演習します。



このとき、数直線に「目盛り」を振らないようにしてください。与えられた数字から、身に付けたルールを使って長さを求められなければ、たとえ答えの数字が合っても意味がありませんし、小数や分数が出てきたとたんに目盛りを数えられなくなり困ってしまいます。図が厳密である必要がないことを示すために、たとえば $1000000-1000001$ のような計算を数直線上でやって見せるのも有効です。また、数直線には「どちらがプラス(値が大きい)なのか」を示す「矢印」と「ゼロ」である「原点」が必要だということも強調しておいてください。

ここでのポイントは

- 必ず原点から出発する
- 値が増えるのは矢印方向の移動
- 値が減るのは矢印と反対方向の移動
- 移動し終わった所の数字を確認してから次の移動をする
- 原点に向かって動くときは、原点を跨いで越えるのか、越えないのかの判断が必要

といった事柄です。とくに原点の意識が重要で $3-5$ であれば「3から左に5」ではなく、必ず「原点から右に3のあと左に5」という移動で示してください。

一通りの説明が終わったら、間違えてもらうために出題した難しめの問題を解決しておきます。難しく見える問題に出会っても、やるべきことをひとつひとつ解決すれば大丈夫なのだということを強調しながら、

$$-\frac{3}{7} + 1.5 - 3 = -\frac{6}{14} + \frac{21}{14} - \frac{42}{14} = \frac{-6 + 21 - 42}{14} = -\frac{37}{14}$$

といった計算を、通分のしかたや分母がそろった後の処理などに注意しながら確実な方法で解いて見せて、練習問題に移ります。その場でさっと作れる自信がなければ、まえもって問題を用意しておきましょう。

生徒が解き終わったら回答を(答えだけでなく計算途中も)追いかけて、不確実な計算をしているところや解き方を誤解しているところを探します。本当は、間違えた部分から、なぜ正しい答えが出ないのか、どこを修正すれば正しい答えが出るようになるのか、修正するためには何を身に付けるべきで、どう教えたら効率がよいか、ということを考えなくてはなりません、そこまで本格的にやるのは高校生には無理なので、代わりに正しい計算をやって見せましょう。

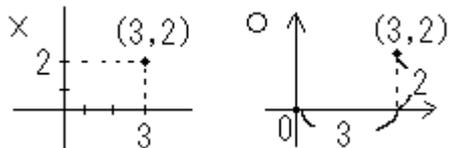
最後に、数直線の特徴を再確認しておきます。

- 「値」を「方向のある移動量」とみなす。
- 連続して移動することで足し算引き算を計算できる。
- 図は厳密に描かなくてよいが数字が出てくる理由はしっかり確認する。

意欲のある生徒には、より素早く計算する方法として $3 - 5 = -(5 - 3)$ といったテクニックを教えるも構いませんし、次で習うはずなので「方向を無視した長さ」が絶対値と表裏であることに触れても構いませんが、どちらも必須ではありません。

余談

数直線について、必ず原点から出発するように、目盛りを振らないようにと書きましたが、これは座標を考えるとときも同様です。数直線が2本あるのが平面座標、3本あるのが空間座標なので当たり前ではありますが、一応指摘しておきます。



高校生になったら、座標軸どころか原点すら「どこにあるか決めないまま」図を描かなければならなくなるのは知っての通りですが、最初に習うときにある程度「抽象的な描き方」を知っておけば、後からの苦労はぐっと少なくなります。